



KC-238

Seat No. _____

Third Year B. Sc. Examination

March/April - 2013

Mathematics : Paper - X

(Discrete Mathematics)

Time : 3 Hours]

[Total Marks : 105

- સૂચના : (૧) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.
(૨) જમણી બાજુ દર્શાવેલા અંક એ અનુરૂપ પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

- ૧ (અ) ધારો કે $\langle L, \leq \rangle$ જાલિકા છે. બતાવો કે ગણ L પર બે ૭
દ્વિફલિયાઓ $*$ અને \oplus એવી મળે કે જેથી $\langle L, *, \oplus \rangle$ એ
બીજગણિતીય પ્રણાલી પ્રમાણે જાલિકા છે.
(બ) આંશિક ક્રમિક ગણ તથા સર્વથા ક્રમિક ગણની વ્યાખ્યા આપો. ૭
યોગ્ય સંકેતોમાં સાબિત કરો કે $\langle \mathbb{N}, D \rangle$ એ આંશિક ક્રમિક ગણ
છે. પરંતુ સર્વથા ક્રમિક ગણ નથી.
(ક) ઉપજાલિકાની વ્યાખ્યા આપો. બતાવો કે જાલિકાનો દરેક ૭
સંવૃત અંતરાલ એ ઉપજાલિકા છે.

અથવા

- ૧ (અ) સાબિત કરો કે બે જાલિકાઓનો વજ ગુણાકાર પણ ૭
જાલિકા છે.
(બ) બે જાલિકાઓની એકરૂપતાની વ્યાખ્યા આપો. બતાવો કે ૭
 $L = \{0, 1\}$ માટે જાલિકા $\langle L^3, \leq \rangle$ અને $\langle P(\{a, b, c\}), \cap, \cup \rangle$
એકરૂપ જાલિકાઓ છે.
(ક) પૂરક વિભાજનીય જાલિકા $\langle L, *, \oplus, 0, 1, ' \rangle$ માં બતાવો કે ૭
 $a \leq b \Leftrightarrow a * b' = 0 \Leftrightarrow b' \leq a' \Leftrightarrow a' \oplus b = 1, \forall a, b \in L.$

- ૨ (અ) કર્નોફની લઘુકરણની રીત સમજાવો. આ રીતનો ઉપયોગ કરી ૭ બુલિયન અભિવ્યક્તિ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \oplus(2, 5, 6, 7, 8, 10, 14) \text{ નું લઘુકરણ કરો.}$$

- (બ) અણુની વ્યાખ્યા આપો. બતાવો કે બુલિયન બીજગણિત ૭

$\langle B, *, \oplus, 0, 1, ' \rangle$ ના પ્રત્યેક ઘટક x ને અણુઓના સરવાળા સ્વરૂપે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય છે.

- (ક) બુલિયન બીજગણિત $\langle S_6, D \rangle$ માં $x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = 3$ ૭

અને $x_4 = 1$ લઈ $\alpha(2, 6, 3, 1)$ શોધો.

$$\text{જ્યાં } \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 * x_2 * [(x_1 * x_4) \oplus x_2' \oplus x_3 * x_1']$$

અથવા

- ૨ (અ) સ્ટોનનું નિરૂપણ પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. ૭

- (બ) બુલિયન અભિવ્યક્તિ ૭

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus (x_1 * x_2 * x_3') \oplus (x_1 * x_2' * x_3')$$

નું ઘનહાર નિરૂપણ કરી લઘુકરણ કરો.

- (ક) બુલિયન બીજગણિત માટે ε -મોર્ગનનો નિયમ લખો અને સાબિત કરો. ૭

- ૩ (અ) શિરોબિંદુની કક્ષાની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે દરેક ૭

ગ્રાફમાં અયુગ્મ કક્ષાના શિરોબિંદુની સંખ્યા યુગ્મ જ હોય.

- (બ) સાબિત કરો કે n -શિરોબિંદુવાળા ટ્રીમાં ધારોની સંખ્યા ૭

$n-1$ છે.

- (ક) કેલેના પ્રમેયનું વિધાન લખો. તથા પૂર્ણગ્રાફ K_4 નાં તમામ ૭

સ્પાનિંગ ટ્રી જણાવો.

અથવા

- ૩ (અ) ગ્રાફ G વિભક્ત હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત ૭

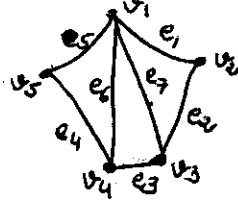
શરત લખો અને સાબિત કરો.

- (બ) સાબિત કરો કે n -કક્ષા અને K - ઘટકોવાળા સાદા ગ્રાફને ૭
વધુમાં વધુ $(n-k)(n-k+1)/2$ ધારો હોય.
- (ક) બતાવો કે નવ વ્યક્તિઓના સમૂહમાં દરેક વ્યક્તિ બાકીની ૭
બરાબર પાંચ જ વ્યક્તિઓને ઓળખે એ અશક્ય ઘટના છે.
- ૪ (અ) સમતલીય અવિભક્ત ગ્રાફ G માટે ઓઈલરનું પ્રમેય લખો ૭
અને સાબિત કરો.
- (બ) પરિપથ સદિશોનો ગણ W_T ની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે ૭
 W_T એ સદિશ અવકાશ W_G નો ઉપાવકાશ છે.
- (ક) ગ્રાફ G એ (4, 5) ગ્રાફ છે. જ્યાં $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ૭
અને $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ એ સંગતતા
 $e_1 \leftrightarrow (v_1, v_2), e_2 \leftrightarrow (v_2, v_3), e_3 \leftrightarrow (v_3, v_4),$
 $e_4 \leftrightarrow (v_1, v_4), e_5 \leftrightarrow (v_2, v_4)$
દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે યોગ્ય સંકેતોમાં :
- (૧) સદિશ અવકાશ W_G ના આધારના ઘટકો લખો અને
 $\dim W_G$ જણાવો.
- (૨) ઉપાવકાશ W_S ના ઘટકો લખો. તથા $\dim(W_S)$ જણાવો.

અથવા

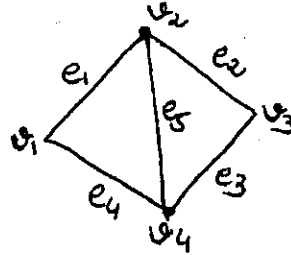
- ૪ (અ) અવિભક્ત ગ્રાફ G માં શિરોબિંદુ v એ કાપશિરોબિંદુ હોય ૭
તો અને તો જ G ના શિરોબિંદુઓ x અને y એવા મળે કે જેથી x
અને y વચ્ચેનો દરેક પથ v માંથી પસાર થાય
- (બ) n -શિરોબિંદુઓ, e -ધારો અને f -પ્રદેશોવાળા સમતલીય ૭
અવિભક્ત ગ્રાફ માટે સાબિત કરો કે
- (૧) $e \geq \frac{3}{2}f$
- (૨) $e \leq 3n - 6$
- (ક) સાબિત કરો કે વિયોજનીય ન હોય તેવા ગ્રાફનો શૂન્યાંક ૭
એક હોય તો અને તો જ તે ગ્રાફ પરિપથ છે.

- ૫ (અ) અચક્રીય દિશાવાળા ગ્રાફની વ્યાખ્યા આપો, સાબિત કરો કે દરેક દિશાક્ષમ ટ્રી એ અચક્રીય દિશાવાળો ગ્રાફ છે. આ પ્રમેયનું પ્રતિપ્રમેય સત્ય છે ? તમારો જવાબ ચકાસો. ૭
- (બ) ગ્રાફના આચ્છાદનની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે ગ્રાફ G નું આચ્છાદન H એ અલ્પિષ્ટ આચ્છાદન હોય તો અને તો જ H એ ત્રણ કે તેથી વધુ લંબાઈના પથને ન સમાવે. ૭
- (ક) કાપગણ શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો નીચે આપેલ ગ્રાફ માટે કાપગણ શ્રેણિક શોધો. ૭



અથવા

- ૫ (અ) અવિભક્ત ગ્રાફ G માટે સાબિત કરો કે $\chi(G) = 2$ તો અને તો જ G એ દ્વિવિભાગીય ગ્રાફ છે. ૭
- (બ) અનુષાંગિક શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે n -શિરોબિંદુઓ વાળા અવિભક્ત ગ્રાફના અનુષાંગિક શ્રેણિકનાં કોષ્ટક $n-1$ હોય. ૭
- (ક) ગ્રાફ G ૭



માટે પરિણામ $AB^T = BA^T = O \pmod{2}$ ચકાસો

જ્યાં A = ગ્રાફ G નો આનુષાંગિક શ્રેણિક

B = ગ્રાફ G નો પરિપથ શ્રેણિક

B^T = શ્રેણિક B નો પરિવર્ત શ્રેણિક

ENGLISH VERSION

- Instructions :** (1) This question paper contains five questions and all are compulsory.
(2) Figure to the right indicate marks of the corresponding questions.

- 1 (a) Let $\langle L, \leq \rangle$ be a lattice. Prove that there exists two binary operations $*$ and \oplus on L such that $\langle L, *, \oplus \rangle$ is a lattice as an algebraic system. 7
- (b) Define partially ordered set and totally ordered set. In usual notations prove that $\langle \mathbb{N}, D \rangle$ is a partially ordered set but not a totally ordered set. 7
- (c) Define a sublattice. Show that every closed interval of a lattice is a sublattice. 7

OR

- 1 (a) Prove that the direct product of two lattices is again a lattice. 7
- (b) Define an isomorphism of lattices. Show that for $L = \{0, 1\}$ lattice $\langle L^3, \leq \rangle$ and $\langle P(\{a, b, c\}), \cap, \cup \rangle$ are isomorphic. 7
- (c) In a complemented distributive lattice $\langle L, *, \oplus, 0, 1, ' \rangle$, prove that
 $a \leq b \Leftrightarrow a * b' = 0 \Leftrightarrow b' \leq a' \Leftrightarrow a' \oplus b = 1, \forall a, b \in L$. 7
- 2 (a) Explain Karnaugh's method for minimization using Karnaugh's method minimize the Boolean expression. 7
- $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \oplus(2, 5, 6, 7, 8, 10, 14)$

- (b) Define an atom. Show that every element x of a Boolean algebra $\langle B, *, \oplus, 0, 1, ' \rangle$ can be uniquely expressed as a sum of atoms of B . 7

- (c) Find the value of 7

$$\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 * x_2 * [(x_1 * x_4) \oplus x_2' \oplus x_3 * x_1']$$

for $x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = 3$ and $x_4 = 1$ over the Boolean algebra $\langle S_6, D \rangle$.

OR

- 2 (a) State and prove Stone's representation theorem. 7

- (b) Using cube array method for representation of a boolean expression 7

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus (x_1 * x_2 * x_3') \oplus (x_1 * x_2' * x_3')$$

and minimize it.

- (c) State and prove D'Morgan's law for boolean Algebra. 7

- 3 (a) Define degree of vertex. Prove that in any graph, number of odd vertices are always even. 7

- (b) Show that a tree with n vertices has precisely $n-1$ edges. 7

- (c) State and prove Cayley's theorem. Draw all spanning trees of a complete graph K_4 . 7

OR

- 3 (a) State and prove the necessary and sufficient condition for a graph G to be disconnected. 7

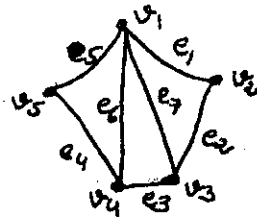
- (b) Show that a simple graph with n -vertices and k -components has at most $(n-k)(n-k+1)/2$ edges. 7

- (c) Prove that it is impossible to have a group of nine people such that each person of the group knows exactly five of the others in the group. 7
- 4 (a) State and prove Euler's theorem for a connected planar graph. 7
- (b) Define a circuit vector set W_Γ . Show that W_Γ is a subspace of a vector space W_G . 7
- (c) Let G be a $(4, 5)$ graph $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ define as 7
- $e_1 \leftrightarrow (v_1, v_2), e_2 \leftrightarrow (v_2, v_3), e_3 \leftrightarrow (v_3, v_4),$
 $e_4 \leftrightarrow (v_1, v_4),$ and $e_5 \leftrightarrow (v_2, v_4)$
- in usual notations
- (1) Find the basis of a vector space W_G and $\dim W_G$.
- (2) Find the elements of subspace W_S and $\dim(W_s)$.

OR

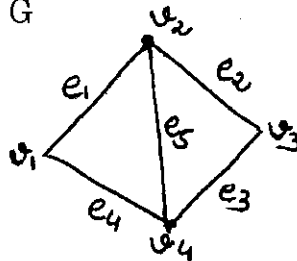
- 4 (a) Prove that v is a cut vertex of a connected graph G if and only if there exist two vertices x and y in G such that every path between x and y passes through v . 7
- (b) For a connected plane graph, having n -vertices, e -edges and f -faces prove that : 7
- (1) $e \geq \frac{3}{2}f$
- (2) $e \leq 3n - 6$
- (c) Prove that a graph G is a circuit iff it is a non-separable graph with nullity only one. 7

- 5 (a) Define a cyclic diagram. Show that every directed tree is an acyclic diagram. Is converse true ? Justify your answer. 7
- (b) Define the covering of a graph G . Prove that covering g of a graph G is minimal if and only if g contains no path of length three or more. 7
- (c) Define cut set matrix and find the cut set matrix for a given graph. 7



OR

- 5 (a) For a connected graph G , show that $\chi(G) = 2$ if and only if G is bipartite. 7
- (b) Define an incidence matrix. Show that the rank of an incidence matrix of a connected graph G with n -vertices is $(n-1)$. 7
- (c) For a graph G 7



Verify the result :

$$AB^T = BA^T = O \pmod{2}$$

Where A = incidence matrix of G

B = circuit matrix of G

B^T = Transpose of a matrix of B .