

- ૧ (અ) કાપના ગણ તરીકે R ને વ્યાખ્યાયિત કરીને બતાવો કે ૭
 R ન્યૂનતમ ઉર્ધ્વસીમા ગુણ ધરાવે છે.
- (બ) કમિક ગણ S લો, જે ન્યૂનતમ ઉર્ધ્વસીમા ગુણધર્મ ધરાવે છે. ૭
 $B \subset S, B \neq \emptyset$ તેમજ B અધ: સીમિત છે. B ની
અધ:સીમાઓનો ગણ L છે. સાબિત કરો કે $\alpha = \text{Sup } L$ નું S માં
અસ્તિત્વ છે અને $\alpha = \text{inf } \beta$.
- (ક) સંકર સંખ્યાઓ Z અને W માટે સાબિત કરો કે : ૭
- (૧) $|Z \cdot W| = |Z| |W|$
- (૨) $|Z + W| \leq |Z| + |W|$.

- ૨ (અ) જો X માનાવકાશ હોય તથા $E \subset X$ હોય તો સાબિત ૭
કરો કે \bar{E} સંવૃત્ત ગણ છે.
- (બ) સાબિત કરો કે વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ઉપગણ E અવિભક્ત ૭
હોય તો અને તો જ $x \in E, y \in E$ અને $x < z < y$ તો $z \in E$.
- (ક) $(0,1)$ ના એવા વિવૃત્ત આચ્છાદનનું ઉદાહરણ આપો કે જેનું ૭
સાન્ત આચ્છાદન ન મળે.

અથવા

- ૨ (અ) બતાવો કે પ્રત્યેક k -cell એ સુબદ્ધ ગણ છે. ૭
- (બ) બતાવો કે ગણ E એ વિવૃત્ત હોય તો અને તો જ તેનો ૭
પૂરકગણ સંવૃત્ત છે.

(ક) સાબિત કરો કે પૂર્ણાંક સંખ્યાગણ Z એ ગણ્ય છે. ૭

૩ (અ) ધારોકે $\{S_n\}$ એકસુત્રી શ્રેણી છે. જો $\{S_n\}$ સીમિત હોય ૭
તો અને તો જ અભિસારી છે. સાબિત કરો.

(બ) X માં આવેલી શ્રેણી $\{P_n\}$ ના ઉપશ્રેણિક લક્ષોનો ગણ X માં ૭
સંવૃત્ત છે. બતાવો.

(ક) જો $\{p_n\}$ અને $\{q_n\}$ માનાવકાશ (X, d) માં કોશીશ્રેણીઓ ૭
હોય તો સાબિત કરો કે $\{d(p_n, q_n)\}, R$ માં અભિસારી છે.

અથવા

૩ (અ) ધારો કે, ૭

(૧) શ્રેઢી $\sum a_n$ નો આંશિક સરવાળો સીમિત શ્રેણી રચે છે.

(૨) $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq 0$.

(૩) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

તો સાબિત કરો કે $\sum a_n b_n$ અભિસારી છે.

(બ) ધારો કે $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$. સાબિત કરો કે શ્રેઢી ૭

$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ અભિસારી હોય તો અને તો જ શ્રેઢી $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

અભિસારી છે.

(ક) નીચેની શ્રેઢીઓની અભિસારની ત્રિજ્યા મેળવો :

૭

$$(૧) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^n}{n \cdot 2^n}$$

$$(૨) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot z^n}{n+3}$$

૪ (અ) ધારો કે X અને Y માનાવકાશ છે અને $E \subset X$, P એ E નું લક્ષબિંદુ છે તથા $f: E \rightarrow Y$ વિધેય છે. સાબિત કરો કે E માં આવેલી શ્રેણી $\{P_n\}$, જ્યાં $P_n \neq P$ અને $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$

માટે $\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = q$ તો અને તો જ $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = q$.

(બ) બતાવો કે સુબદ્ધ માનાવકાશનું સતત પ્રતિબિંબ સુબદ્ધ છે. ૭

(ક) $f(x) = \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$, $x \neq 0$ તથા $f(0) = 0$ તો f નો ૭

અસાતત્યનો પ્રકાર જણાવો.

અથવા

૪ (અ) જો $\bar{f}: [a, b] \rightarrow R^k$ હોય અને \bar{f} , $[a, b]$ પર સતત અને (a, b) માં વિકલનીય હોય તો સાબિત કરો કે $x \in (a, b)$

અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $|\bar{f}(b) - \bar{f}(a)| \leq (b-a) \left| f'(x) \right|$

થાય.

(બ) ટેઈલરનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. ૭

(ક) ધારો કે ૭

(૧) f એ $x \geq 0$ માટે વિકલનીય છે.

(૨) $f'(0) = 0$ અને $f(0) = 0$

(૩) f' એ વધતું વિધેય છે.

જો $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$ તો સાબિત કરો કે g વધતું

વિધેય છે.

૫ (અ) ધારો કે K સુબલ્લ ગણ છે. ધારો કે K પરનાં સતત ૭

વિધેયોની શ્રેણી $\{f_n\}$ એ સતત વિધેય f ને બિંદુદીઠ અભિસરે

છે. અને $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, $\forall x \in K$, $n = 1, 2, 3, \dots$ તો

સાબિત કરો કે $f_n \rightarrow f$, K પર એકરૂપ અભિસારી છે.

(બ) ધારો કે માનાવકાશ X માં ગણ E પર વ્યાખ્યાયિત વિધેયોની ૭

શ્રેણી $\{f_n\}$ એકરૂપ અભિસારી હોય અને x એ E નું લક્ષબિંદુ

હોય અને $\lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = A_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ તો સાબિત કરો

કે $\{A_n\}$ અભિસારી છે તથા $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

(ક) જો $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}$, $n=1,2,3,\dots$ અને $0 \leq x \leq 1$ ૭

તો સાબિત કરો કે $\{f_n\}$ એ એકરૂપ સીમિત છે, પરંતુ એકરૂપ અભિસારી નથી.

અથવા

૫ (અ) ધારો કે K સુબદ્ધ ગણ છે. જો K પર સતત વિધેયોની ૭

શ્રેણી $\{f_n\}$ એકરૂપ અભિસારી હોય તો સાબિત કરો કે $\{f_n\}$ એ K પર સમસતત છે.

(બ) સાબિત કરો કે $C(X)$ એ સંપૂર્ણ માનાવકાશ છે. ૭

જ્યાં X એ માનાવકાશ છે.

(ક) જો $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, $0 < x < 1$ તો સાબિત કરો કે ૭

$f_n(x) \rightarrow 0$ બિંદુદીઠ $(0,1)$ પર અભિસરે છે પરંતુ અભિસાર એકરૂપ નથી.

ENGLISH . VERSION

Instructions : (i) All questions are **compulsory**.

(ii) Figure to the **right** side indicate marks of the corresponding questions.

1 (a) If $x, y \in R$ and $x > 0$ then prove that there exists positive integer n such that $nx > y$. 7

(b) If α is a cut then prove that there exists a cut β such that $\alpha + \beta = 0^*$. 7

(c) In usual notation prove that : 7

$$(1) \quad r^* \cdot s^* = (rs)^*$$

$$(2) \quad r < s \Leftrightarrow r^* < s^* .$$

OR

1 (a) Define R as a set of cuts and show that R has the least upper bound property. 7

(b) Suppose S is an ordered set with least upper bound property. $B \subset S, B \neq \phi$, B is bounded below. Let L be the set of all lower bounds of B then prove that $\alpha = \text{Sup } L$ exists in S and $\alpha = \text{inf } \beta$. 7

(c) For complex numbers Z and W prove that 7

$$(1) \quad |Z \cdot W| = |Z| |W|$$

$$(2) \quad |Z + W| \leq |Z| + |W| .$$

- 2 (a) If X is a metric space and $E \subset X$ then prove 7
that \bar{E} is a closed set.
- (b) Prove that a subset of E of real numbers is 7
connected if and only if $x \in E, y \in E$ and
 $x < z < y$ then $z \in E$.
- (c) Give an open cover of $(0,1)$ which has no 7
finite subcover.

OR

- 2 (a) Show that every k -cell is compact set. 7
- (b) Show that set E is an open if and only if its 7
complement is closed.
- (c) Prove that the set of integers Z is countable. 7
- 3 (a) Suppose $\{S_n\}$ is monotonic. Prove that $\{S_n\}$ 7
converges if and only if it is bounded.
- (b) Show that the subsequential limit of a 7
sequence $\{P_n\}$ in a metric space X form a
closed subset of X .
- (c) If $\{p_n\}$ and $\{q_n\}$ are Cauchy sequence in 7
a metric space X then show that sequence
 $\{d(p_n, q_n)\}$ converges.

OR

3 (a) Suppose :

7

(1) Partial sum of series $\sum a_n$ form a bounded sequence.

(2) $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq 0$.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Prove that $\sum a_n b_n$ converges.

(b) Suppose $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$. Prove that

7

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges if and only if $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$

converges.

(c) Find the radius of convergence for the following series :

7

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^n}{n \cdot 2^n}$$

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot z^n}{n+3}$$

4 (a) Suppose X and Y are metric spaces and $E \subset X$, P is a limit point of E and $f: E \rightarrow Y$ be a function. Prove that $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = q$ if and

only if $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = q$, for every sequence

$\{P_n\}$ in E such that $P_n \neq P$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$.

(b) Show that continuous image of compact space is compact.

(c) If $f(x) = \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$, $x \neq 0$ and $f(0) = 0$ then

determine the type of discontinuity of f .

OR

4 (a) If $\bar{f}: [a, b] \rightarrow R^k$ and \bar{f} is continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b) then prove that there exists $x \in (a, b)$ such that

$$|\bar{f}(b) - \bar{f}(a)| \leq (b-a) \left| f'_{(\bar{x})} \right|.$$

(b) State and prove Taylor's theorem.

(c) Suppose :

7

(1) f is differentiable for $x \geq 0$.

(2) $f'(0) = 0$ and $f(0) = 0$

(3) f' is monotonically increasing.

If $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$ then prove that g is

monotonically increasing.

5 (a) Let K be a compact. Suppose a sequence

7

$\{f_n\}$ of continuous functions of K converges pointwise on K to a continuous function f on K and $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, $\forall x \in K$, $n = 1, 2, 3, \dots$ then prove that $f_n \rightarrow f$ uniformly on K .

(b) Suppose $f_n \rightarrow f$ uniformly on a set E in a

7

metric space X and let x be a limit point of E and suppose $\lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = A_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

then prove that $\{A_n\}$ converges and

$$\lim_{t \rightarrow x} f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

- (c) If $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}$, $n=1,2,3,\dots$ and $0 \leq x \leq 1$ 7

show that $\{f_n\}$ is uniformly bounded but convergence is not uniform.

OR

- 5 (a) If K is a compact metric space and 7

$f_n \in C(K)$, $n=1,2,3,\dots$. If $\{f_n\}$ converges uniformly on K then prove that $\{f_n\}$ is an equicontinuous on K .

- (b) Prove that $C(X)$ is complete metric space 7
where X is a metric space.

- (c) If $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, $0 < x < 1$ then prove that 7

$f_n(x) \rightarrow 0$ pointwise on $(0,1)$ but convergence is not uniform.