KC-204

Seat No.________

Third Year B. Sc. Examination

March/April – 2013

Mathematics : Paper - VI

(Abstract Algebra)

Time : 3 Hours] [Total Marks : 105

સૂચના : (૧) બધા જ પ્રશ્નોના જવાબ આપો.
(૨) જમણી બાજુના અંક પ્રશ્નના પૂરા ગુણ દર્શાવે છે.

૧ (અ) વ્યાખ્યા આપો : ૭
(૧) સમૂહ
(૨) સમૂહ G માં ઘટક 'a'ની કક્ષા. સાબિત કરો કે જો સમૂહ G માં ઘટક 'a'ની કક્ષા n હોય તો કોઈ પૂર્ણાંક સંખ્યા m માટે $a^m = e$ તો અને તો જ n/m.

(બ) જો H એ સમૂહ G નો ઉપસમૂહ હોય તો સાબિત કરો કે પ્રત્યેક $a \in G$ માટે $[a] = Ha$ ૭
જ્યાં $[a] = \{b \in G / b \equiv (\mathrm{mod}\, H)\}$

(ક) ધારો કે સમૂહ G ના કોઈ ઘટક a માટે $o(a) = n$ હોય તો સાબિત કરો કે ૭
(૧) $o(a^p) \le o(a)$, જ્યાં $p \in Z$
(૨) જો ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા q માટે $(q,n) = 1$ તો $o(a^q) = o(a)$.

અથવા

૧ (અ) ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા n તથા પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે જો $(n,a) = 1$ હોય તો સાબિત કરો કે $a^{\phi(n)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, n)$ જ્યાં ϕ એ ઓઈલરનું ફાઈ વિધેય છે. ૭

(બ) લાગ્રાન્જનું પ્રમેય લખો. ૭
તારવો કે, જો H અને K એ સમૂહ G ના શાંત ઉપસમૂહ હોય તથા $(o(H), o(K)) = 1$ હોય તો $H \cap K = \{e\}$.

(ક) ધારો કે H એ સમૂહ G નો ઉપસમૂહ છે. સાબિત કરો કે સમૂહ G ના બે ઘટકો a અને b માટે કાં તો $H_a = H_b$ અથવા $H_a \cap H_b = \phi$. ૭

૨ (અ) સાબિત કરો કે : ૭

(૧) જો કોઈ સમૂહના ઉપસમૂહનો, તે સમૂહમાં ઘાતાંક 2 હોય તો તે ઉપસમૂહ નિયત ઉપસમૂહ છે.

(૨) $n \geq 2$ માટે સાબિત કરો કે સંમિત સમૂહ S_n નો ઉપસમૂહ A_n નિયત ઉપસમૂહ છે.

(બ) જો ૭

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 10 & 7 & 8 & 14 & 9 & 12 & 5 & 11 & 6 & 3 & 4 & 1 & 13 & 2 \end{pmatrix} \in S_{14}$$

હોય તો

(૧) બતાવો કે $f \in S_{14}$ એ યુગ્મ ક્રમચય છે કે અયુગ્મ.

(૨) $o\left(f^{-1}\right)$ શોધો.

(ક) S_n ના બે પરસ્પર અલગ ચક્રો સમક્રમી છે તેમ સાબિત કરો. ૭

અથવા

૨ (અ) જો સમૂહ G નો ઉપસમૂહ H હોય અને G નો નિયત ઉપસમૂહ N હોય તો સાબિત કરો કે $H \cap N$ એ H નો નિયત ઉપસમૂહ છે. ૭

(બ) સમૂહ G ના નિયત ઉપસમૂહની વ્યાખ્યા આપો. જો G નો નિયત ઉપસમૂહ N હોય તો સાબિત કરો કે $N_a . N_b = N_{ab}, \forall a, b \in G$. ૭

(ક) સાબિત કરો કે $f \in S_n$ ની કક્ષા તેના પરસ્પર અલગ ચક્રોની લંબાઈના લઘુતમ સાધારણ અવયવી બરાબર હોય છે. ૭

૩ (અ) સમૂહ G ના નિશ્ચિત ઘટક g માટે, ૭

$i_g : G \to G$ જ્યાં $i_g(x) = gxg^{-1}, x \in G$ હોય તો સાબિત કરો કે (પ્રચલિત સંકેતોમાં)

(૧) $i_g \in a(G)$

(૨) $I(G) = \{i_g : g \in G\}$ એ $a(G)$ નો નિયત ઉપસમૂહ છે.

(બ) સાબિત કરો કે ચક્રિય સમૂહનો દરેક ઉપસમૂહ પણ ચક્રિય છે. ૭

(ક) ધારો કે $G = \langle a \rangle$ એ n-કક્ષાવાળો શાંત ચક્રિય સમૂહ છે. $1 \le s < n$ માટે G નો ઘટક a^s એ G નો સર્જક હોય તો અને તો જ $(n, s) = 1$ એમ સાબિત કરો. ૭

અથવા

૩ (અ) પ્રચલિત સંકેતોમાં, જો સમૂહ G માટે $a(G) = \{I_G\}$ હોય તો સાબિત કરો કે ૭

(૧) સમૂહ G એ સમક્રમી છે.

(૨) $a^2 = e, \forall a \in G$.

(બ) જો $\phi : (G, o) \to (G', *)$ એ કર્નલ K સહિતની સમરૂપતા હોય તો સાબિત કરો કે $G/K \cong \phi(G)$. ૭

(ક) સાબિત કરો કે શાંત ચક્રિય સમૂહ અને તેના સર્જક બંનેની કક્ષા સમાન હોય છે. ૭

૪ (અ) સાબિત કરો કે દરેક ક્ષેત્ર એ પૂર્ણ પ્રદેશ છે. શું આ પ્રમેયનું પ્રતિપ્રમેય સત્ય છે ? આપના જવાબને આધારે આપો. વધુમાં તારવો કે કયા પ્રતિબંધો હેઠળ પૂર્ણ પ્રદેશ ક્ષેત્ર બનશે. ૭

(બ) સાબિત કરો કે જો એકમ સંપન્ન મંડળ R ની લાક્ષણિકતા n હોય તો અને તો જ n એ એવો નાનામાં નાનો ધન પૂર્ણાંક છે કે જેથી $n.1 = 0$ થાય. ૭

(ક) જો એકમ સંપન્ન સમક્રમી મંડળ R માં I એ ગુરૂત્તમ ઈષ્ટમંડળ હોય તો સાબિત કરો કે R/I ક્ષેત્ર છે. ૭

અથવા

૪ (અ) સાબિત કરો કે એકમ સંપન્ન સમક્રમી મંડળ R ને જો ઉચીત ઈષ્ટમંડળ ન હોય તો R ક્ષેત્ર છે. ૭

(બ) મંડળની વ્યાખ્યા આપો. ૭
એવા મંડળનું ઉદાહરણ આપો જે એકમ સંપન્ન ન હોય તથા સમક્રમી પણ ન હોય.

(ક) ધારો કે I_1 અને I_2 મંડળ R ના ઈષ્ટમંડળો છે. સાબિત કરો કે $I_1 \cup I_2$ પણ મંડળ R નું ઈષ્ટમડળ હોય તો અને તો જ કાં તો $I_1 \subset I_2$ અથવા $I_2 \subset I_1$. ૭

૫ (અ) પૂર્ણ પ્રદેશ D ઉપર વ્યાખ્યાયિત શૂન્યેતર બહુપદી f ના પરિમાણની વ્યાખ્યા આપો. પૂર્ણપ્રદેશ D પર વ્યાખ્યાયિત શૂન્યેતર બહુપદીઓ f અને g માટે સાબિત કરો કે ૭
$0 \le \deg(f) \le \deg(f.g)$

અથવા

(અ) ક્ષેત્ર F પર બહુપદીઓ માટેનો ભાગ સિદ્ધાંત લખો અને સાબિત કરો. ૭

(બ) ગમે તે બે ગણો : ૧૪

(૧) બહુપદીઓ $f = (2,0,-1,4,0,0.....)$ અને $g = (1,-2,0,3,0,0,....) \in Z[x]$ માટે $f+g, f.g$ અને g^2 શોધો.

(૨) જો $f(x) \in F[x]$ ના પરિમાણ n હોય તો સાબિત કરો કે $f(x)$ ને F માં વધારેમાં વધારે n શૂન્યો હોઈ શકે.
વધુમાં $Z_{12}[x]$ માં $f(x) = x^2 - 5x + 6$ નાં શૂન્યો મેળવો. આમ કેમ ?

(૩) ક્ષેત્ર $Z_5[x]$ માં જેનો ઉકેલ ગણ $\{2,3\}$ હોય તેવી બહુપદી મેળવો. શું આ મેળવેલ બહુપદી $Q[x]$ માં સંક્ષેપ્ય છે ? તમારા જવાબને સમર્થન આપો.

ENGLISH VERSION

Instructions : (1) Attempt all questions.
(2) Figures to the right indicate marks of the corresponding question.

1 (a) Define : 7
(1) Group
(2) Order of an element 'a' in a group G.
Prove that if $a \in G$ is of order n then $a^m = e$ for some intiger m iff n/m.

(b) If H is a subgroup of G then for each $a \in G$, prove that $[a] = Ha$, where 7

$[a] = \{b \in G / b \equiv (\text{mod} H)\}$

(b) Suppose $o(a) = n$ for an element a in a group G then prove that : 7

(1) $o(a^p) \leq o(a)$, $p \in \mathbb{Z}$

(2) If for a positive integer q, $(q,n) = 1$ then $o(a^q) = o(a)$.

OR

1 (a) If $(n,a) = 1$ for a natural number n and integer a, then prove that $a^{\phi(n)} \equiv 1(\text{mod}\, n)$, where ϕ is the Euler's phi function defined on $\mathbb{N}$. 7

(b) State the Lagrange's theorem. Deduce that if H and K are finite subgroups of a given group G with $(o(H), o(K)) = 1$ then $H \cap K = \{e\}$. 7

(c) Let H be a subgroup of a group G. Prove that for two elements $a, b \in G$ either $H_a = H_b$ or $H_a \cap H_b = \phi$. 7

2 (a) Prove that... 7

(1) A subgroup of index 2 in a group G is a normal subgroup.

(2) The alternating subgroup A_n of symmetric group S_n is a normal subgroup of S_n, for each $n \geq 2$.

(b) For 7

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 10 & 7 & 8 & 14 & 9 & 12 & 5 & 11 & 6 & 3 & 4 & 1 & 13 & 2 \end{pmatrix} \in S_{14}$$

(1) Check whether $f \in S_{14}$ is an even permutation or an odd.

(2) find $o\left(f^{-1}\right)$

(c) Prove that any two disjoint cycles in S_n are commutative. 7

OR

2 (a) If H is a subgroup of G and N is a normal subgroup of G then prove that $H \cap N$ is a normal subgroup of H. 7

(b) Define a normal subgroup of a group G. 7
If N is a normal subgroup of G, then prove that $N_a.N_b = N_{ab}, \forall a,b \in G$.

(c) Prove that the order of a permutation $f \in S_n$ is the least common multiple of the lengths of its disjoint cycles. 7

3 (a) For a fixed element g of a given group G, 7
If $i_g : G \to G$, where $i_g(x) = gxg^{-1}, x \in G$ then prove that (in usual notat7ion).

(1) $i_g \in a(G)$

(2) $I(G) = \{i_g : g \in G\}$ is a normal subgroup of $a(G)$.

(b) Show that every subgroup of a cyclic group is cyclic. 7

(c) Let $G = \langle a \rangle$ be a finite cyclic group of order n. For $1 \le s < n$, prove that the element $a^s \in G$ is a generator of G iff $(n, s) = 1$. 7

OR

3 (a) In usual notation, if G is a group with $a(G) = \{I_G\}$ then prove that 7

(1) G is a commutative group.

(2) $a^2 = e, \forall a \in G$.

(b) If $\phi : (G, o) \to (G', *)$ is a homomorphism with Kernel K then prove that $G/K \cong \phi(G)$. 7

(c) Prove that a finite cyclic group and its generator both have the same order. 7

4 (a) Prove that every field is an integral domain. Is converse true ? Justify your answer. Under what restriction, an integral domain is a field ? Prove it. 7

(b) Prove that the characteristics of ring R with unity is n iff n is the smallest positive integer with $n.1 = 0$. 7

(c) An ideal I in a commutative ring R with unity is a maximal ideal then prove that R/I is a field. 7

OR

4 (a) If a commutative ring R with unity has no proper ideal then R is a field. 7

(b) Define a ring. 7
Give an example of a ring which is neither commutative nor has a unity element.

(c) Let I_1 and I_2 be ideals of a ring R. Prove that $I_1 \cup I_2$ is an ideal of R iff either $I_1 \subset I_2$ or $I_2 \subset I_1$. **7**

5 (a) Define the degree of a non-zero polynomial f defined on an integral domain D. Show that $0 \le \deg(f) \le \deg(f.g)$ for non-zero polynomials f and g on an integral domain D. **7**

OR

(a) State and prove the principle of division algorithm for polynomials over a field F. **7**

(b) Attempt any two. **14**

(1) For polynomials $f = (2, 0, -1, 4, 0, 0.....)$ and $g = (1, -2, 0, 3, 0, 0, ...)$

Find $f + g, f.g$ and g^2.

(2) Prove that if the digree of a polynomial $f(x) \in F[x]$ is n, then $f(x)$ has atmost n distinct zeroes in F.

Moreover, find all zeroes of $f(x) = x^2 - 5x + 6$ in $Z_{12}(x)$; why so ?

(3) Obtain the polynomial equation in $Z_5[x]$ whose solution set is $\{2, 3\}$. Moreover, is the obtained polynomial rducible in $Q[x]$? Justify your answer.